Grundlagentraining

Teil 1

Bruchrechnen in Kurzform

Für alle, die es benötigen,

z. B. zur Prüfungsvorbereitung in 10 …

Zu diesen Beispielen gibt es einen Leistungstest in 10249.

Ausführliche Texte zur Bruchrechnung findet man in:

10201	Kürzen und Erweitern
10202	Bruchteile von Größen
10205	Addition und Subtraktion
10207	Multiplikation und Division

Datei Nr. 10250

Stand: 8. Januar 2018

Friedrich Buckel

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

Inhalt

Dieser Text soll Schüler das nochmals zeigen, was sie können sollten. Es werden die Grundlagen wiederholt, Beispiele gezeigt, und zum Trainieren gibt es Aufgaben mit ausführlichen Lösungen.

Geeignet zur Prüfungsvorbereitung.

Zu diesen Beispielen gibt es einen Leistungstest in Nummer 12249

Hier stehen dann die Lösungen. Wer sich also zuerst testen möchte, bearbeite zuerst den Test.

1 Addition und Subtraktion

Regel 1: Brüche werden **addiert / subtrahiert**, indem man sie zuvor **durch Erweitern** auf einen **gemeinsamen Nenner** bringt und dann ihre Zähler addiert/subtrahiert.

Es ist günstig, den kleinsten gemeinsamen Nenner zu verwenden.
Diesen nennt man den **Hauptnenner**. Er wird als kgV (kleinstes gemeinsames Vielfaches) der einzelnen Nenner berechnet.

a) $\frac{3}{4}+\frac{5}{2}$ Der gemeinsame Nenner ist 4. Durch Erweitern mit 2, wird $\frac{5}{2}=\frac{5\cdot\boxed{2}}{2\cdot\boxed{2}}=\frac{10}{4}$.

Erweitern heißt Zähler und Nenner mit derselben Zahl multiplizieren. Das ändert nur die Form des Bruches, nicht sein Wert! Genau das besagt das Gleichheitszeichen.

Ganze Rechnung: $\frac{3}{4}+\frac{5}{2}=\frac{3}{4}+\frac{5\cdot\boxed{2}}{2\cdot\boxed{2}}=\frac{3}{4}+\frac{10}{4}=\frac{13}{4}$

b) $\frac{3}{4}+\frac{2}{3}$ Der gemeinsame Nenner ist jetzt 12.

Der Bruch $\frac{3}{4}$ wird mit 3 erweitert: $\frac{3\cdot\boxed{3}}{4\cdot\boxed{3}}=\frac{9}{12}$, der Bruch $\frac{2}{3}$ mit 4: $\frac{2}{3}=\frac{2\cdot\boxed{4}}{3\cdot\boxed{4}}=\frac{8}{12}$

Ganze Rechnung: $\frac{3}{4}+\frac{2}{3}=\frac{9}{12}+\frac{8}{12}=\frac{17}{12}$

c) $\frac{11}{8}-\frac{5}{6}$ Viele meinen, dass der Hauptnenner hier das Produkt $8\cdot 6=48$ ist.

Das ist jedoch falsch, denn beide Nenner haben den gemeinsamen Teiler 2.
Daher ist der Hauptnenner, also das kleinste gemeinsame Vielfache, bereits 24.

Der Bruch $\frac{11}{8}$ wird mit 3 erweitert und $\frac{5}{6}$ mit 4:

Ganze Rechnung: $\frac{11}{8}-\frac{5}{6}=\frac{11\cdot\boxed{3}}{8\cdot\boxed{3}}-\frac{5\cdot\boxed{4}}{6\cdot\boxed{4}}=\frac{33}{24}-\frac{20}{24}=\frac{13}{24}$

d) $\frac{4}{36}+\frac{11}{42}$ Bei größeren Nennern erkennt man das kgV oft nicht gleich. Dann kann man die Methode der Primfaktorzerlegung anwenden:

Man schreibt nur gleiche Primfaktoren untereinander.
Das Produkt aller in einer Spalte stehenden Primzahlen ergibt das kgV, den Hauptnenner. Aus den fehlenden Primzahlen bildet man die Erweiterungszahlen.

$36=2\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdot\square \quad |\,EZ=7$
$42=2\cdot\square\cdot 3\cdot\square\cdot 7 \quad |\,EZ=6$
$HN=\underbrace{2\cdot 2\cdot 3\cdot 3}_{=36}\cdot 7=252$

$\frac{4}{36}+\frac{11}{42}=\frac{4\cdot\boxed{7}}{36\cdot\boxed{7}}+\frac{11\cdot\boxed{6}}{42\cdot\boxed{6}}=\frac{28}{252}+\frac{66}{252}=\frac{94}{252}=\frac{47}{126}$

Kürzer:

$36=6\cdot 6\cdot\square \quad |\,EZ=7$
$42=6\cdot\square\cdot 7 \quad |\,EZ=6$
$HN=6\cdot 6\cdot 7=252$

Beim Kurzverfahren muss man darauf achten, dass die nicht gemeinsamen Faktoren auch wirklich teilerfremd sind!

e) $\frac{17}{36}+\frac{23}{24}-\frac{19}{18}$

Berechnung des Hauptnenners:

(1) durch Kopfrechnung: Ich betrachte zuerst 36 und 24. Das Doppelte von 36 ist 72, und das ist das 3-fache von 24.
Andererseits ist auch 18 darin enthalten: 4-mal.
Also ist das kgV dieser drei Zahlen 72.

(2) Primfaktorzerlegung:

$36 = 4\cdot 9 = 2\cdot 2 \cdot 3\cdot 3\cdot\square$	EZ = 2
$24 = 4\cdot 6 = 2\cdot 2\cdot\square\cdot 3\cdot 2$	EZ = 3
$18 = 3\cdot 6 = \square\cdot\square\cdot 3\cdot 3\cdot 2$	EZ = 4
$\text{HN} = 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdot 2 = 72$	

Ausführliche Berechnung:

$$\frac{17}{36}+\frac{23}{24}-\frac{19}{18}=\frac{17\cdot\boxed{2}}{36\cdot\boxed{2}}+\frac{23\cdot\boxed{3}}{24\cdot\boxed{3}}-\frac{19\cdot\boxed{4}}{18\cdot\boxed{4}}=\frac{34}{72}+\frac{69}{72}-\frac{76}{72}=\frac{27}{72}=\frac{3}{8}$$

Am Ende haben 27 und 72 den gemeinsamen Teiler 9, so dass man durch 9 kürzen konnte.

Trainingsaufgaben 1

f) $\frac{5}{9}+\frac{3}{4}$ g) $\frac{5}{9}+\frac{7}{18}$ h) $\frac{5}{9}+\frac{17}{24}$

i) $\frac{25}{44}-\frac{1}{5}$ j) $\frac{99}{40}-\frac{17}{60}$ k) $\frac{41}{81}-\frac{16}{27}$

l) $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$ m) $\frac{3}{4}+\frac{5}{6}+\frac{19}{24}$ n) $\frac{4}{21}+\frac{5}{28}-\frac{2}{7}$

Bei den nächsten drei Aufgaben berechne den Hauptnenner mit Primfaktorzerlegung:

o) $\frac{33}{56}+\frac{19}{36}$ p) $\frac{5}{12}+\frac{7}{18}+\frac{1}{30}$ q) $\frac{17}{36}-\frac{3}{20}-\frac{5}{27}$

2 Gemischte Brüche

Addiert man zur Zahl 3 den Bruch $\frac{5}{8}$, dann geht das so: $3+\frac{5}{8}=\frac{24}{8}+\frac{5}{8}=\frac{29}{8}$.

Man sieht, dass bei diesem Bruch der Zähler größer ist als der Nenner.
Das liegt daran, dass sein Wert größer als 1 ist.

Ein Bruch, dessen Zähler größer als sein Nenner ist, heißt <u>unechter Bruch</u>.

Man kann die Ganzen aus ihm herausziehen. Dazu muss man eine Division beginnen.
Jeder Bruch stellt im Grunde eine Divisionsaufgabe dar. Hier heißt sie:

29 : 8 = ?

Und so kann man überlegen: 8 geht in 29 3-mal: $3\cdot 8=24$ und als Rest bleibt 5 übrig.

Also werden aus den 29 Achtel 3 Ganze, und 5 Achtel bleiben übrig.

Dies schreibt man so auf: $\frac{29}{8}=3+\frac{5}{8}$.

Für eine Summe aus einer ganzen Zahl und einem Bruch haben die Mathematiker eine abkürzende Schreibweise eingeführt. Man darf hier das Pluszeichen einfach weglassen.

$3\frac{5}{8}$ ist also dasselbe wie $3+\frac{5}{8}$

Einen unechten Bruch kann man also als gemischten Bruch schreiben. Beispiele:

$\frac{29}{8}=3+\frac{5}{8}=3\frac{5}{8}$ oder

$\frac{20}{3}=6+\frac{2}{3}=6\frac{2}{3}$ denn 20 : 3 = 6, Rest 2 (Drittel).

$\frac{83}{11}=\cancel{7+\frac{6}{11}}=7\frac{6}{11}$ denn 83:11=7, Rest 6 (Elftel). Die Summe schreibt man nicht auf.

$\frac{147}{10}=14\frac{7}{10}$ denn 10 geht in 147 14-mal, Rest 7 (Zehntel).

$\frac{51}{4}=12\frac{3}{4}$ denn 4 geht in 51 12-mal, Rest 3 (Viertel).

Verwandlung eines gemischten Bruches in einen unechten Bruch:

$5\frac{1}{6}=\frac{5\cdot 6}{6}+\frac{1}{6}=\frac{31}{6}$ oder so: $5\frac{1}{6}=\frac{5\cdot 6+1}{6}=\frac{31}{6}$

$12\frac{5}{8}=\frac{12\cdot 8+5}{8}=\frac{101}{8}$

$9\frac{14}{25}=\frac{9\cdot 25+14}{25}=\frac{225+14}{25}=\frac{239}{25}$

3 Addition und Subtraktion von gemischten Brüchen

a) $$4\frac{3}{8}+5\frac{1}{6}=\underbrace{(4+5)+\left(\frac{3}{8}+\frac{1}{6}\right)}_{\text{Nicht aufschreiben, aber so rechnen}}=9+\frac{3\cdot\boxed{3}}{8\cdot\boxed{3}}+\frac{1\cdot\boxed{4}}{6\cdot\boxed{4}}=9+\frac{9}{24}+\frac{4}{24}=9\frac{13}{24}$$

Das rechnet man schneller so: $4\frac{3}{8}+5\frac{1}{6}=9+\frac{3\cdot\boxed{3}+1\cdot\boxed{4}}{24}=9\frac{13}{24}$

b) Dabei kann auch so etwas passieren:

$11\frac{13}{25}+8\frac{19}{30}$ Der Hauptnenner ist 150: $25\cdot6=150$ und $30\cdot5=150$:

$$11\frac{13}{25}+8\frac{19}{30}=19+\frac{13\cdot6+19\cdot5}{150}=19\frac{78+95}{150}=19\frac{173}{150}$$

Dieser gemischte Bruch enthält jetzt den unechten Bruch $\frac{173}{150}=1\frac{23}{150}$.

Daher sieht die ganze Rechnung so aus:

$$11\frac{13}{25}+8\frac{19}{30}=19+\frac{13\cdot6+19\cdot5}{150}=19\frac{78+95}{150}=19\frac{173}{150}=20\frac{23}{150}$$

c) $$5\frac{1}{2}-3\frac{1}{4}=\underbrace{\cancel{(5-3)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)}}_{\text{nur im Kopf}}=2+\left(\frac{2}{4}-\frac{1}{4}\right)=2\frac{1}{4}$$

Kürzer: $5\frac{1}{2}-3\frac{1}{4}=2\frac{2-1}{4}=2\frac{1}{4}$

d) $6-\frac{3}{4}$???

Jetzt muss man 6 in $5\frac{4}{4}$ umwandeln und so rechnen: $6-\frac{3}{4}=\boxed{5\frac{4}{4}}-\frac{3}{4}=5+\left(\frac{4}{4}-\frac{3}{4}\right)=5\frac{1}{4}$

Oder kurz so: $6-\frac{3}{4}=5+\frac{4-3}{4}=5\frac{1}{4}$

e) $5\frac{1}{2}-3\frac{3}{4}=(5-3)+\left(\frac{2}{4}-\frac{3}{4}\right)$???

Man erkennt, dass die Subtraktion nicht ausführbar ist.

In so einem Fall verwendet man ein Ganzes (das man von 5 wegnimmt) und verwandelt es in weitere Viertel, so dass man subtrahieren kann:

$$5\frac{1}{2}-3\frac{3}{4}=5\frac{2}{4}-3\frac{3}{4}=4\frac{6}{4}-3\frac{3}{4}=(4-3)+\left(\frac{6}{4}-\frac{3}{4}\right)=1\frac{3}{4}$$

Das schreiben Könner so auf:

$$5\frac{1}{2}-3\frac{3}{4}=4\frac{6}{4}-3\frac{3}{4}=1\frac{3}{4}$$

Wenn man die einzelnen Umformungen begriffen hat, kann man solche Aufgaben selbst lösen.

Großes Musterbeispiel:

f) $$6\frac{2}{9}-\boxed{4\frac{2}{3}}=6\frac{2}{9}-\boxed{4\frac{6}{9}}=2\frac{2-6}{9}=\boxed{1\frac{9+2-6}{9}}=1\frac{5}{9}$$

Zuerst auf den Hauptnenner erweitern !

Man subtrahiert zuerst die Ganzen. Bei der Subtraktion der Zähler stellt man fest, dass 2 - 6 so nicht geht.

Also wandelt man ein Ganzes in weitere 9 Neuntel um!

Man hätte auch die gemischten Brüche zuerst in unechte Brüche verwandeln können. Dies hat jedoch in manchen Aufgaben den Nachteil, dass große Zahlen im Zähler entstehen, die man im Kopf kaum mehr verrechnen kann!

$$6\frac{2}{9}-4\frac{2}{3}=\underbrace{\frac{54+2}{9}-\frac{12+2}{3}}_{\text{Nicht aufschreiben!}}=\frac{56}{9}-\frac{14}{3}=\underbrace{\frac{56-14\cdot\boxed{3}}{9}}_{\text{Nur im Kopf!}}=\frac{56-42}{9}=\frac{14}{9}=1\frac{5}{9}$$

Kurz: $$6\frac{2}{9}-4\frac{2}{3}=\frac{56}{9}-\frac{14}{3}=\frac{56-42}{9}=\frac{14}{9}=1\frac{5}{9}$$

Trainingsaufgaben 2

a) Schreibe als unechte Brüche:

$6\frac{2}{11}=$ $\qquad$ $12\frac{3}{4}=$ $\qquad$ $18\frac{1}{2}=$ $\qquad$ $4\frac{5}{36}$

b) Schreibe als gemischte Brüche:

$\frac{13}{3}=$ $\qquad$ $\frac{30}{7}=$ $\qquad$ $\frac{50}{15}=$ $\qquad$ $\frac{101}{48}=$

c) Berechne:

$3\frac{1}{4}+5\frac{1}{3}=$ $\qquad$ $13\frac{3}{8}+7\frac{5}{6}=$

$9\frac{3}{5}-4\frac{4}{10}=$ $\qquad$ $15\frac{1}{9}-8\frac{5}{6}$

Lösungen am Ende des Textes.

4 Multiplikation eines Bruches mit einer ganzen Zahl

Die Rechnung dazu lautet: $\frac{3}{4}+\frac{3}{4}+\frac{3}{4}=\frac{9}{4}$

Diese Aufgabe kann man als Multiplikation schreiben: $\boxed{3}\cdot\frac{3}{4}=\frac{\boxed{3}\cdot 3}{4}=\frac{9}{4}$

In Worten: **REGEL 1** **Eine Zahl wird mit einem Bruch multipliziert, indem man sie mit dem Zähler multipliziert.**

Beispiele:

a) $2\cdot\frac{5}{7}=\frac{2\cdot 5}{7}=\frac{10}{7}$

b) $5\cdot\frac{8}{3}=\frac{5\cdot 8}{3}=\frac{40}{3}$

c) $\frac{7}{9}\cdot 8=\frac{7\cdot 8}{9}=\frac{56}{9}$

d) $\frac{13}{50}\cdot 3=\frac{39}{50}$

Es gibt Situationen, in denen man die Regel 1 nicht anwenden sollte. Dazu dieses Beispiel:

e) $36\cdot\frac{5}{24}=\frac{36\cdot 5}{24}=\frac{180}{24}=\frac{15}{2}$

Zuerst wurde 36 mit 5 multipliziert, dann ***entstand die große Zahl*** 180, am Ende konnte (musste) man noch kürzen!

Die bessere Rechnung sieht so aus:

$36\cdot\frac{5}{24}=\frac{{}^{3}\cancel{36}\cdot 5}{{}_{2}\cancel{24}}=\frac{15}{2}$

Hier wurde **vor** der Multiplikation gekürzt!

Diesen Kürzungsvorgang kann man schon ganz zu Beginn vornehmen, wenn man weiß, dass der Faktor **vor** dem Bruch eigentlich zum Zähler gehört:

${}^{3}\cancel{36}\cdot\frac{5}{{}_{2}\cancel{24}}=\frac{15}{2}$

So ist die Rechnung optimal kurz gelungen!

f) $\frac{25}{9}\cdot 18=?$

Zuerst nachdenken und erkennen: **Man kann durch 9 kürzen!**

$\frac{25}{\cancel{9}_{1}}\cdot\cancel{18}^{2}=\cancel{\frac{25\cdot 2}{1}}=50$

Den mittleren Bruch schreibt man nicht auf.

g) $39\cdot\frac{31}{26}=?$

Zuerst nachdenken und erkennen: **Man kann durch 13 kürzen!**

${}^{3}\cancel{39}\cdot\frac{31}{\cancel{26}_{2}}=\frac{93}{2}$

MERKE: **Eine Zahl wird mit einem Bruch oder ein Bruch mit einer Zahl multipliziert, indem man diese Zahl mit dem Zähler multipliziert, aber erst, nachdem man sie (falls möglich) gegen den Nenner gekürzt hat.**

5 Division eines Bruches durch eine ganze Zahl

auf CD …